



UCSC

Agujeros
de Gusano
Fantasma
de
tamaño
finito

Fabián
Orellana

ndice

Moti-
vación

Marco
Teórico

Metodología

Resultados

Agujeros
de gusano
de tamaño
finito

Con-
strucción
de
agujeros
de gusano

Conclu-
siones

Agujeros de Gusano Fantasma de tamaño finito

Fabián Orellana

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

November 30, 2017



- 1 Motivación
- 2 Marco Teórico
- 3 Metodología
- 4 Resultados
- 5 Agujeros de gusano de tamaño finito
- 6 Construcción de agujeros de gusano
- 7 Conclusiones

- En general, en el estudio de agujeros de gusano la función de forma $b(r)$ utilizada es de tipo potencia.

- En general, en el estudio de agujeros de gusano la función de forma $b(r)$ utilizada es de tipo potencia.
- No se han estudiado funciones de forma más complejas como lo son las de tipo cuadráticas.

- En general, en el estudio de agujeros de gusano la función de forma $b(r)$ utilizada es de tipo potencia.
- No se han estudiado funciones de forma más complejas como lo son las de tipo cuadráticas.
- Una función de forma cuadrática engloba otras funciones más simples consideradas anteriormente para agujeros de gusano, y permite además un estudio de configuraciones más complejas.

- En general, en el estudio de agujeros de gusano la función de forma $b(r)$ utilizada es de tipo potencia.
- No se han estudiado funciones de forma más complejas como lo son las de tipo cuadráticas.
- Una función de forma cuadrática engloba otras funciones más simples consideradas anteriormente para agujeros de gusano, y permite además un estudio de configuraciones más complejas.
- Resulta interesante estudiar agujeros de gusano sustentados por una distribución de materia tipo fantasma.

- En general, en el estudio de agujeros de gusano la función de forma $b(r)$ utilizada es de tipo potencia.
- No se han estudiado funciones de forma más complejas como lo son las de tipo cuadráticas.
- Una función de forma cuadrática engloba otras funciones más simples consideradas anteriormente para agujeros de gusano, y permite además un estudio de configuraciones más complejas.
- Resulta interesante estudiar agujeros de gusano sustentados por una distribución de materia tipo fantasma.



- Consideremos una solución atravesable de un Agujero de Gusano estático, con simetría esférica y que conecte dos regiones asintóticamente planas.



- Consideremos una solución atravesable de un Agujero de Gusano estático, con simetría esférica y que conecte dos regiones asintóticamente planas. Para ello analizaremos la solución de Morris y Thorne.

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

La función redshift $\phi(r)$ determina el corrimiento al rojo gravitacional, y la función de forma $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano.



- Consideremos una solución atravesable de un Agujero de Gusano estático, con simetría esférica y que conecte dos regiones asintóticamente planas. Para ello analizaremos la solución de Morris y Thorne.

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

La función redshift $\phi(r)$ determina el corrimiento al rojo gravitacional, y la función de forma $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.
 - a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.
 - a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.
 - b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.

a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.

b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.

c) Distancia radial propia finita $\frac{b(r)}{r} \leq 1 \rightarrow l(r) = \pm \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.
 - a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.
 - b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.
 - c) Distancia radial propia finita $\frac{b(r)}{r} \leq 1 \rightarrow l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$.
 - d) Condición de asintotía plana $\rightarrow \frac{b(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.
 - a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.
 - b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.
 - c) Distancia radial propia finita $\frac{b(r)}{r} \leq 1 \rightarrow l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$.
 - d) Condición de asintotía plana $\rightarrow \frac{b(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.
- Postulamos un tensor energía-momentum que cumpla con la simetría esférica impuesta.



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.

a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.

b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.

c) Distancia radial propia finita $\frac{b(r)}{r} \leq 1 \rightarrow l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$.

d) Condición de asintotía plana $\rightarrow \frac{b(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

- Postulamos un tensor energía-momentum que cumpla con la simetría esférica impuesta.

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = P(r) \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = P_l(r)$$



- Para tener la geometría de un agujero de gusano exigimos algunas condiciones.

a) Condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi(r)} = \text{finito}$.

b) Existencia de un mínimo para el radio (garganta) $\rightarrow b(r) = r_0$.

c) Distancia radial propia finita $\frac{b(r)}{r} \leq 1 \rightarrow l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}$.

d) Condición de asintotía plana $\rightarrow \frac{b(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

- Postulamos un tensor energía-momentum que cumpla con la simetría esférica impuesta.

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad T_{\hat{r}\hat{r}} = P(r) \quad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = P_l(r)$$



- Por otro lado, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$G_{\widehat{t}\widehat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}$$

$$G_{\widehat{r}\widehat{r}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'$$

$$G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\phi'' + (\phi')^2 - \frac{b'(r)r + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \phi' - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b)} \right]$$

$$G_{\widehat{\phi}\widehat{\phi}} = G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}}$$



- Por otro lado, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\phi'' + (\phi')^2 - \frac{b'(r)r + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \phi' - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b)} \right]$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$$

- Ahora, de $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ y $\phi = cte$ tenemos que:



- Por otro lado, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$G_{\widehat{t}\widehat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}$$

$$G_{\widehat{r}\widehat{r}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'$$

$$G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\phi'' + (\phi')^2 - \frac{b'(r)r + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \phi' - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b)} \right]$$

$$G_{\widehat{\phi}\widehat{\phi}} = G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}}$$

- Ahora, de $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ y $\phi = cte$ tenemos que:

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'(r)}{r^2} \quad \kappa P_r(r) = -\frac{b(r)}{r^3} \quad \kappa P_l(r) = \frac{b(r) - b'(r)r}{2r^3}$$



- Por otro lado, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$G_{\widehat{t}\widehat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}$$

$$G_{\widehat{r}\widehat{r}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'$$

$$G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\phi'' + (\phi')^2 - \frac{b'(r)r + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \phi' - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b)} \right]$$

$$G_{\widehat{\phi}\widehat{\phi}} = G_{\widehat{\theta}\widehat{\theta}}$$

- Ahora, de $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ y $\phi = cte$ tenemos que:

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'(r)}{r^2} \quad \kappa P_r(r) = -\frac{b(r)}{r^3} \quad \kappa P_l(r) = \frac{b(r) - b'(r)r}{2r^3}$$

En adelante consideraremos $\kappa = 1$.



- Por otro lado, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left[\phi'' + (\phi')^2 - \frac{b'(r)r + b(r) - 2r}{2r(r - b(r))} \phi' - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b)} \right]$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$$

- Ahora, de $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ y $\phi = cte$ tenemos que:

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'(r)}{r^2} \quad \kappa P_r(r) = -\frac{b(r)}{r^3} \quad \kappa P_l(r) = \frac{b(r) - b'(r)r}{2r^3}$$

En adelante consideraremos $\kappa = 1$.

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- Analizamos también la componente g_{rr} de la métrica utilizada.

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- Analizamos también la componente g_{rr} de la métrica utilizada.

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}$$

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- Analizamos también la componente g_{rr} de la métrica utilizada.

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}$$

para ver si el espaciotiempo contiene el Agujero de Gusano.

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- Analizamos también la componente g_{rr} de la métrica utilizada.

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}$$

para ver si el espaciotiempo contiene el Agujero de Gusano.

- Y la función de embebimiento.

$$dz(r) = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} dr$$

- La condición necesaria para que exista una garganta en el agujero de gusano es llamada Condición de *Flare-Out*, y la podemos ver con el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b(r) - b'(r)r}{2b^2(r)} > 0$$

Así $z(r_0)$ será un mínimo relativo en tal punto.

- Analizamos también la componente g_{rr} de la métrica utilizada.

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}$$

para ver si el espaciotiempo contiene el Agujero de Gusano.

- Y la función de embebimiento.

$$dz(r) = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} dr$$

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

■ NEC

$$\rho + P_i \geq 0$$

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

■ NEC

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ SEC

$$\rho + \sum_i P_i \geq 0$$

$$\rho + P_i \geq 0$$

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

■ NEC

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ SEC

$$\rho + \sum_i P_i \geq 0$$

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ DEC

$$\rho \geq 0$$

$$-\rho \geq P_i \geq \rho$$

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

■ NEC

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ SEC

$$\rho + \sum_i P_i \geq 0$$

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ DEC

$$\rho \geq 0$$

$$-\rho \geq P_i \geq \rho$$

Donde $P_i = P_r, P_l$.

Las condiciones de energía son un conjunto de restricciones que nos permiten estudiar el tipo de materia presente en la teoría de estudio. Dentro de ellas se encuentran:

■ WEC

$$\rho \geq 0$$

$$\rho + P_i > 0$$

■ NEC

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ SEC

$$\rho + \sum_i P_i \geq 0$$

$$\rho + P_i \geq 0$$

■ DEC

$$\rho \geq 0$$

$$-\rho \geq P_i \geq \rho$$

Donde $P_i = P_r, P_l$.

Consideremos el parámetro de estado con dependencia radial de la forma

$$\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}. \text{ Donde:}$$

- Si $0 < \omega(r) < 1/3$ estamos frente a radiación.

Consideremos el parámetro de estado con dependencia radial de la forma

$$\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}. \text{ Donde:}$$

- Si $0 < \omega(r) < 1/3$ estamos frente a radiación.
- Si $-1/3 < \omega(r) < 0$, entonces estamos frente a materia.

Consideremos el parámetro de estado con dependencia radial de la forma $\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}$. Donde:

- Si $0 < \omega(r) < 1/3$ estamos frente a radiación.
- Si $-1/3 < \omega(r) < 0$, entonces estamos frente a materia.
- Si $-1 < \omega(r) < -1/3$ entonces estamos frente a energía oscura.

Consideremos el parámetro de estado con dependencia radial de la forma

$$\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}. \text{ Donde:}$$

- Si $0 < \omega(r) < 1/3$ estamos frente a radiación.
- Si $-1/3 < \omega(r) < 0$, entonces estamos frente a materia.
- Si $-1 < \omega(r) < -1/3$ entonces estamos frente a energía oscura.
- Si $\omega(r) < -1$ entonces nos encontramos con una distribución de energía fantasma.

Consideremos el parámetro de estado con dependencia radial de la forma

$$\omega(r) = \frac{P_r(r)}{\rho(r)}. \text{ Donde:}$$

- Si $0 < \omega(r) < 1/3$ estamos frente a radiación.
- Si $-1/3 < \omega(r) < 0$, entonces estamos frente a materia.
- Si $-1 < \omega(r) < -1/3$ entonces estamos frente a energía oscura.
- Si $\omega(r) < -1$ entonces nos encontramos con una distribución de energía fantasma.

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

Entonces encontramos que

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

Entonces encontramos que

$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}\right) + r}{r^3}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

Entonces encontramos que

$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}\right) + r}{r^3}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

Podemos ver de estas ecuaciones que:

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

Entonces encontramos que

$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}\right) + r}{r^3}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

Podemos ver de estas ecuaciones que:

$$\rho(r) + P_r(r) + 2P_l(r) = 0$$

- Consideremos la función redshift y la función de forma dadas por:

$$\phi = \phi(r) \quad b(r) = a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

- Utilizando la condición del valor mínimo que puede tomar el radio $b(r_0) = r_0$, despejamos a_2 obtenemos:

$$b(r) = a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1\right)r + a_3$$

Entonces encontramos que

$$\rho(r) = \frac{a_1 r_0 (2r - r_0) + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_r(r) = -\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0}\right) + r}{r^3}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

Podemos ver de estas ecuaciones que:

$$\rho(r) + P_r(r) + 2P_l(r) = 0$$



- La componente radial de la métrica:



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 rr_0)}$$



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 rr_0)}$$

- La función de embebimiento:



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 r r_0)}$$

- La función de embebimiento:

$$\frac{dz(r)}{dr} = \pm \sqrt{\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0} \right) + r}{r \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{a_3}{r_0} - a_1 r \right)}}$$



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 r r_0)}$$

- La función de embebimiento:

$$\frac{dz(r)}{dr} = \pm \sqrt{\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0} \right) + r}{r \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{a_3}{r_0} - a_1 r \right)}}$$

- La condición de Flare-Out:



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 r r_0)}$$

- La función de embebimiento:

$$\frac{dz(r)}{dr} = \pm \sqrt{\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0} \right) + r}{r \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{a_3}{r_0} - a_1 r \right)}}$$

- La condición de Flare-Out:

$$\frac{a_3 - a_1 r^2}{2 \left(a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1 \right) r + a_3 \right)^2} > 0 \Rightarrow a_3 - a_1 r^2 > 0$$



- La componente radial de la métrica:

$$g_{rr} = \frac{rr_0}{(r - r_0)(a_3 - a_1 r r_0)}$$

- La función de embebimiento:

$$\frac{dz(r)}{dr} = \pm \sqrt{\frac{(r - r_0) \left(a_1 r - \frac{a_3}{r_0} \right) + r}{r \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{a_3}{r_0} - a_1 r \right)}}$$

- La condición de Flare-Out:

$$\frac{a_3 - a_1 r^2}{2 \left(a_1 r^2 - \left(a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1 \right) r + a_3 \right)^2} > 0 \Rightarrow a_3 - a_1 r^2 > 0$$

Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

- a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

- a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.
- La densidad de energía es dada por:

Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

- a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.
- La densidad de energía es dada por:

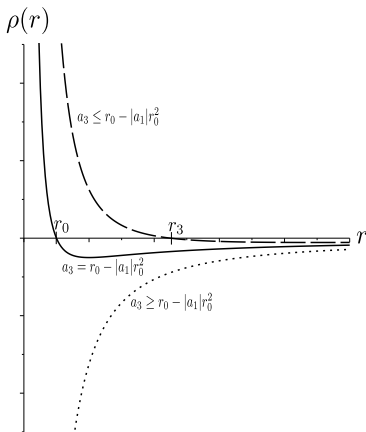
$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

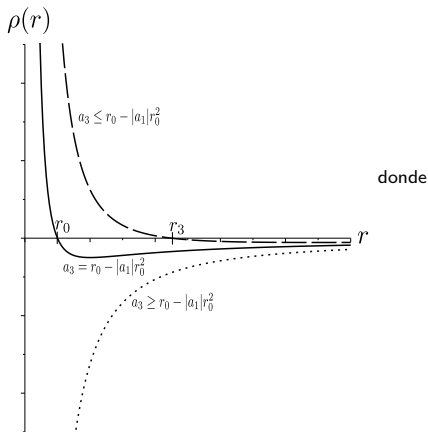


Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

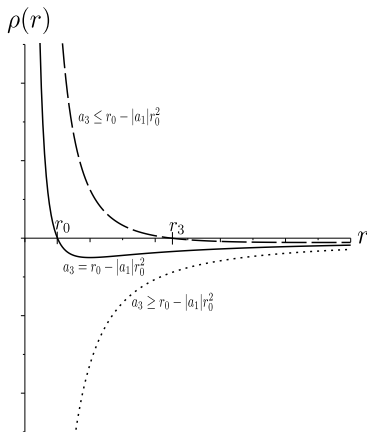


Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$



donde

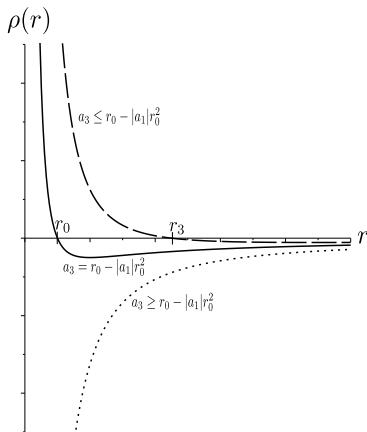
$$r_3 = \frac{r_0 - a_3 + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$$

Analizamos 3 casos en los que es posible construir un agujero de gusano.

a) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe para $0 < r_0 \leq r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$



donde

$$r_3 = \frac{r_0 - a_3 + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 - a_3}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 + |a_1|r^2}{2r^3}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 - a_3}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 + |a_1|r^2}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0}$. Por otro lado:



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 - a_3}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 + |a_1|r^2}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = -\frac{|a_1|r^2 + a_3}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{3|a_1|r^2 - a_3}{2r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 - a_3}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 + |a_1|r^2}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = -\frac{|a_1|r^2 + a_3}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{3|a_1|r^2 - a_3}{2r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 - a_3}{r^2 r_0}$$



- b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.



- b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.
- La densidad de energía es dada por:



b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

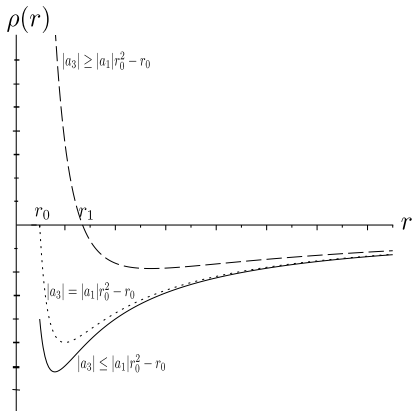
$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$



b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

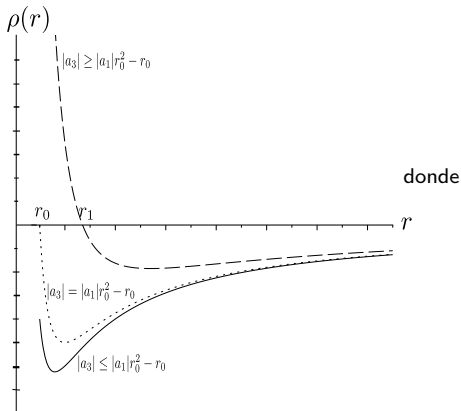




b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

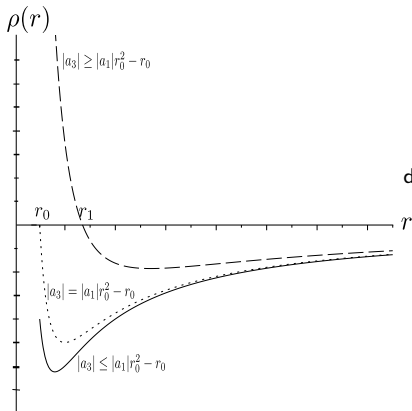




b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$



donde

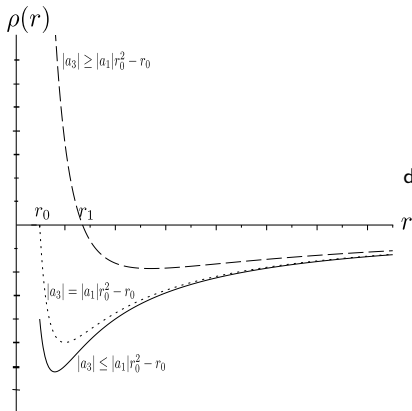
$$r_1 = \frac{r_0 + |a_3| + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$$



b) Cuando $a_1 < 0$ y $a_3 < 0$, la existencia del agujero de gusano se encuentra en el rango $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < r_0 < r < \infty$.

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = -\frac{2|a_1|}{r} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$



donde

$$r_1 = \frac{r_0 + |a_3| + |a_1|r_0^2}{2|a_1|r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Mientras que la presión lateral es negativa para $r < \sqrt{|a_3|/|a_1|}$ y positiva para valores de $r > \sqrt{|a_3|/|a_1|}$.



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Mientras que la presión lateral es negativa para $r < \sqrt{|a_3|/|a_1|}$ y positiva para valores de $r > \sqrt{|a_3|/|a_1|}$.
Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{|a_3| - |a_1|r^2}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Mientras que la presión lateral es negativa para $r < \sqrt{|a_3|/|a_1|}$ y positiva para valores de $r > \sqrt{|a_3|/|a_1|}$.
Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{|a_3| - |a_1|r^2}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

Podemos ver que $\rho(r) + P_r(r)$ se anula para $r = \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y que esta es positiva cuando $r \leq \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y negativa cuando $\sqrt{|a_3|/|a_1|} < r < r_0$.



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = \frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} - \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{|a_1|r^2 - |a_3|}{2r^3}$$

En la garganta $P_r(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}$. Mientras que la presión lateral es negativa para $r < \sqrt{|a_3|/|a_1|}$ y positiva para valores de $r > \sqrt{|a_3|/|a_1|}$. Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{|a_3| - |a_1|r^2}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = -\frac{|a_1|r^2 + |a_3|}{r^3} + \frac{|a_1|r_0^2 + r_0 + |a_3|}{r^2 r_0}$$

Podemos ver que $\rho(r) + P_r(r)$ se anula para $r = \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y que esta es positiva cuando $r \leq \sqrt{|a_3|/|a_1|}$, y negativa cuando $\sqrt{|a_3|/|a_1|} < r_0 < r$.



- c) Cuando $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe en el intervalo $0 < r_0 < r < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$, y el espacio tiempo queda definido hasta $r \leq \frac{a_3}{a_1 r_0}$



- c) Cuando $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe en el intervalo $0 < r_0 < r < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$, y el espacio tiempo queda definido hasta $r \leq \frac{a_3}{a_1 r_0}$
- La densidad de energía es dada por:



- c) Cuando $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe en el intervalo $0 < r_0 < r < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$, y el espacio tiempo queda definido hasta $r \leq \frac{a_3}{a_1 r_0}$
- La densidad de energía es dada por:

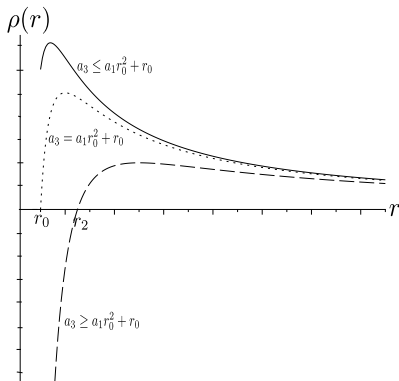
$$\rho(r) = \frac{2a_1}{r} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$



c) Cuando $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$, el agujero de gusano existe en el intervalo $0 < r_0 < r < \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$, y el espacio tiempo queda definido hasta $r \leq \frac{a_3}{a_1 r_0}$

- La densidad de energía es dada por:

$$\rho(r) = \frac{2a_1}{r} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$



donde

$$r_2 = \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{2a_1 r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

La presión lateral desaparece para $r = \sqrt{a_3/a_1}$ y ocurre que $P_l(r) > 0$ para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$.

Por otro lado:



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

La presión lateral desaparece para $r = \sqrt{a_3/a_1}$ y ocurre que $P_l(r) > 0$ para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$.

Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{a_1 r^2 - a_3}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{3a_1}{2r} + \frac{a_3}{2r^3} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

La presión lateral desaparece para $r = \sqrt{a_3/a_1}$ y ocurre que $P_l(r) > 0$ para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$.

Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{a_1 r^2 - a_3}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{3a_1}{2r} + \frac{a_3}{2r^3} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

Como era de esperarse, la condición de energía débil es violada para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$. Para el rango $\sqrt{a_3/a_1} \leq r \leq a_3/a_1$ se cumple que $\rho(r) + P_r(r) \geq 0$.



- Las presiones vienen dadas por:

$$P_r(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

$$P_l(r) = \frac{a_3 - a_1 r^2}{2r^3}$$

La presión lateral desaparece para $r = \sqrt{a_3/a_1}$ y ocurre que $P_l(r) > 0$ para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$.

Por otro lado:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{a_1 r^2 - a_3}{r^3}$$

$$\rho(r) + P_l(r) = \frac{3a_1}{2r} + \frac{a_3}{2r^3} - \frac{a_3 + a_1 r_0^2 - r_0}{r^2 r_0}$$

Como era de esperarse, la condición de energía débil es violada para $r_0 \leq r < \sqrt{a_3/a_1}$. Para el rango $\sqrt{a_3/a_1} \leq r \leq a_3/a_1$ se cumple que $\rho(r) + P_r(r) \geq 0$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta un $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta un $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$.

- Cuando $\Delta < 0 \Rightarrow r_0(1 + a_1 r_0 - 2\sqrt{a_1 r_0}) < a_3 < r_0(1 + a_1 r_0 + 2\sqrt{a_1 r_0})$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta un $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$.

- Cuando $\Delta < 0 \Rightarrow r_0(1 + a_1 r_0 - 2\sqrt{a_1 r_0}) < a_3 < r_0(1 + a_1 r_0 + 2\sqrt{a_1 r_0})$.
El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta $r_{max} = \frac{a_3}{a_1 r_0}$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta un $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$.

- Cuando $\Delta < 0 \Rightarrow r_0(1 + a_1 r_0 - 2\sqrt{a_1 r_0}) < a_3 < r_0(1 + a_1 r_0 + 2\sqrt{a_1 r_0})$.
El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta $r_{max} = \frac{a_3}{a_1 r_0}$.
- Cuando $\Delta > 0$ el embebimiento existe en el rango $(-\infty, r_-) \cup (r_+, +\infty)$.

En adelante, nos centraremos en el caso donde $a_1 > 0$ y $a_3 > 0$.
Analizamos los ceros de la función de forma $b(r)$.

$$r_{\pm} = \frac{a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1}{2a_1} \pm \frac{1}{2a_1} \sqrt{\Delta}$$

Donde $\Delta = (a_1 r_0 + \frac{a_3}{r_0} - 1)^2 - 4a_1 a_3$.

- Cuando $\Delta = 0 \Rightarrow a_3 = r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}$.

El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta un $r_{max} = \sqrt{\frac{r_0 + a_1 r_0^2 \pm 2r_0 \sqrt{a_1 r_0}}{a_1}}$.

- Cuando $\Delta < 0 \Rightarrow r_0(1 + a_1 r_0 - 2\sqrt{a_1 r_0}) < a_3 < r_0(1 + a_1 r_0 + 2\sqrt{a_1 r_0})$.
El agujero de gusano se extiende desde r_0 hasta $r_{max} = \frac{a_3}{a_1 r_0}$.
- Cuando $\Delta > 0$ el embebimiento existe en el rango $(-\infty, r_-) \cup (r_+, +\infty)$.

Nos centraremos ahora en la construcción de agujeros de gusano estáticos tipo fantasma. Es decir:

Nos centraremos ahora en la construcción de agujeros de gusano estáticos tipo fantasma. Es decir:

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} < -1$$

Nos centraremos ahora en la construcción de agujeros de gusano estáticos tipo fantasma. Es decir:

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} < -1$$

Para ello fijaremos los parámetros a_1 y a_3 .

Nos centraremos ahora en la construcción de agujeros de gusano estáticos tipo fantasma. Es decir:

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} < -1$$

Para ello fijaremos los parámetros a_1 y a_3 .

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Además encontramos que:

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Además encontramos que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2-4}{5r^3}; \quad \rho(r) + P_l(r) = \frac{3r^2+4}{10r^2}$$

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Además encontramos que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2-4}{5r^3}; \quad \rho(r) + P_l(r) = \frac{3r^2+4}{10r^2}$$

- La función de forma es dada por:

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Además encontramos que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2-4}{5r^3}; \quad \rho(r) + P_l(r) = \frac{3r^2+4}{10r^2}$$

- La función de forma es dada por:

$$b(r) = (r-1) \left(\frac{r}{5} - \frac{4}{5} \right) + r$$

Consideremos los parámetros $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_3 = \frac{4}{5}$

- El agujero de gusano se extiende desde $r_0 = 1$ hasta $r_{max} = 2$. Y el espaciotiempo se extiende desde la garganta $r_0 = 1$ hasta $r = 4$.
- La densidad de energía, la presión radial y lateral están dadas por:

$$\rho(r) = \frac{2}{5r}; \quad P_r(r) = -\frac{r^2+4}{5r^3}; \quad P_l(r) = \frac{4-r^2}{10r^3}$$

Además encontramos que:

$$\rho(r) + P_r(r) = \frac{r^2-4}{5r^3}; \quad \rho(r) + P_l(r) = \frac{3r^2+4}{10r^2}$$

- La función de forma es dada por:

$$b(r) = (r-1) \left(\frac{r}{5} - \frac{4}{5} \right) + r$$



- Ahora, un análisis del parámetro de estado.



- Ahora, un análisis del parámetro de estado.

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} = -\frac{r^2 + 4}{2r^2}$$



- Ahora, un análisis del parámetro de estado.

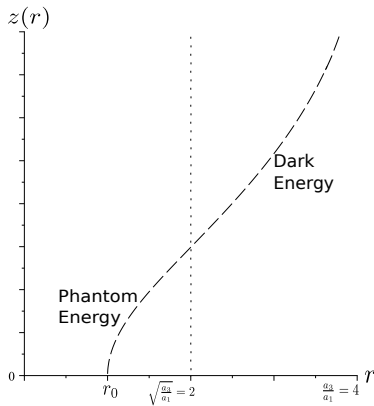
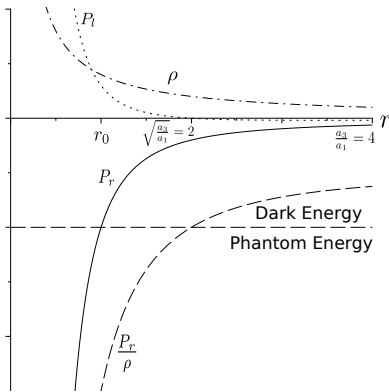
$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} = -\frac{r^2 + 4}{2r^2}$$

nos dice que para $1 \leq r < 2$ tenemos que $-2.5 \leq \omega \leq -1$. Mientras que para $2 \leq r \leq 4$, $-1 \leq \omega \leq -0.625$.

- Ahora, un análisis del parámetro de estado.

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} = -\frac{r^2 + 4}{2r^2}$$

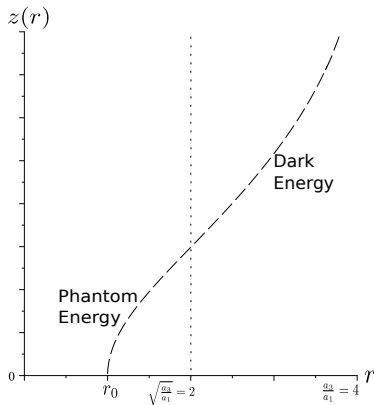
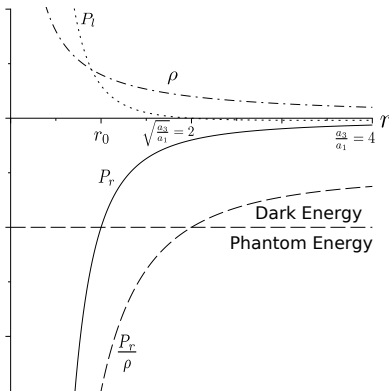
nos dice que para $1 \leq r < 2$ tenemos que $-2.5 \leq \omega \leq -1$. Mientras que para $2 \leq r \leq 4$, $-1 \leq \omega \leq -0.625$.



- Ahora, un análisis del parámetro de estado.

$$\frac{P_r(r)}{\rho(r)} = -\frac{r^2 + 4}{2r^2}$$

nos dice que para $1 \leq r < 2$ tenemos que $-2.5 \leq \omega \leq -1$. Mientras que para $2 \leq r \leq 4$, $-1 \leq \omega \leq -0.625$.

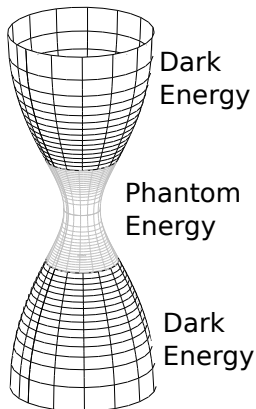




Finalmente, para el caso cuando tenemos una densidad de energía positiva, y $a_1 = 1/5$, $a_3 = 4/5$ podemos construir un agujero de gusano fijándonos en el embebimiento, en el parámetro de estado, y en todos los otros parámetros analizados.

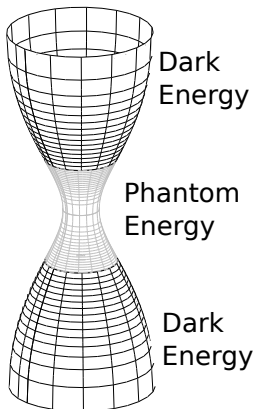


Finalmente, para el caso cuando tenemos una densidad de energía positiva, y $a_1 = 1/5$, $a_3 = 4/5$ podemos construir un agujero de gusano fijándonos en el embebimiento, en el parámetro de estado, y en todos los otros parámetros analizados.





Finalmente, para el caso cuando tenemos una densidad de energía positiva, y $a_1 = 1/5$, $a_3 = 4/5$ podemos construir un agujero de gusano fijándonos en el embebimiento, en el parámetro de estado, y en todos los otros parámetros analizados.



- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.
- Se analizaron agujeros de gusano sustentados por una distribución de energía fantasma.

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.
- Se analizaron agujeros de gusano sustentados por una distribución de energía fantasma.
- Se encontraron soluciones de agujeros de gusano con materia fantasma confinada a una región cercana a la garganta del agujero de gusano, que esta conectada a una distribución de energía oscura.

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.
- Se analizaron agujeros de gusano sustentados por una distribución de energía fantasma.
- Se encontraron soluciones de agujeros de gusano con materia fantasma confinada a una región cercana a la garganta del agujero de gusano, que esta conectada a una distribución de energía oscura.
- Se analizó DEC y los sectores del espaciotiempo donde se cumplía y donde no.

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.
- Se analizaron agujeros de gusano sustentados por una distribución de energía fantasma.
- Se encontraron soluciones de agujeros de gusano con materia fantasma confinada a una región cercana a la garganta del agujero de gusano, que esta conectada a una distribución de energía oscura.
- Se analizó DEC y los sectores del espaciotiempo donde se cumplía y donde no.
- "Static phantom wormhole of finite size", **Phys.Rev. D96 (2017) no.6, 064022.**

- Se ha encontrado una nueva solución de agujeros de gusano estáticos bajo una función de forma cuadrática para la coordenada radial.
- Se construyeron agujeros de gusano de tamaño finito.
- Se analizaron agujeros de gusano sustentados por una distribución de energía fantasma.
- Se encontraron soluciones de agujeros de gusano con materia fantasma confinada a una región cercana a la garganta del agujero de gusano, que esta conectada a una distribución de energía oscura.
- Se analizó DEC y los sectores del espaciotiempo donde se cumplía y donde no.
- "Static phantom wormhole of finite size", **Phys.Rev. D96 (2017) no.6, 064022.**



UCSC

Agujeros
de Gusano
Fantasma
de
tamaño
finito

Fabián
Orellana

ndice

Moti-
vación

Marco
Teórico

Metodología

Resultados

Agujeros
de gusano
de tamaño
finito

Con-
strucción
de
agujeros
de gusano

Conclu-
siones

POR SU ATENCIÓN.



MUCHAS GRACIAS

