

# Soluciones aceleradas tipo FRW en gravedad de Einstein-Chern-Simons

**Cristian A. C. Quinzacara**

**Universidad San Sebastián**  
Facultad de Ingeniería y Tecnología



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**
- ▶ **Teorías de gauge** para los grupos  $A(dS)$ .



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**
- ▶ **Teorías de gauge** para los grupos  $A(dS)$ .
- ▶ Presencia de **altas potencias de la curvatura**.



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**
- ▶ **Teorías de gauge** para los grupos  $A(dS)$ .
- ▶ Presencia de **altas potencias de la curvatura**.
- ▶ Dinámica, en general muy **distinta** de la gravitación de Einstein Hilbert.



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**
- ▶ **Teorías de gauge** para los grupos  $A(dS)$ .
- ▶ Presencia de **altas potencias de la curvatura**.
- ▶ Dinámica, en general muy **distinta** de la gravitación de Einstein Hilbert.
- ▶ **No poseen límite que desemboque en Relatividad General sin constante cosmológica**



# Gravedad Chern-Simons

## Gravitación Chern-Simons

- ▶ En dimensiones **impares**
- ▶ **Teorías de gauge** para los grupos A(dS).
- ▶ Presencia de **altas potencias de la curvatura**.
- ▶ Dinámica, en general muy **distinta** de la gravitación de Einstein Hilbert.
- ▶ **No poseen límite que desemboque en Relatividad General sin constante cosmológica**

## Lagrangiano Chern-Simons AdS en 5D

$$L_{\text{AdS}}^{(5)} = \kappa \epsilon_{abcde} \left( \frac{1}{5l^5} e^a e^b e^c e^d e^e + \frac{2}{3l^3} R^{ab} e^c e^d e^e + \frac{1}{l} R^{ab} R^{de} e^e \right) .$$



# Gravedad de Einstein-Chern-Simons

## Gravitación De Einstein-Chern-Simons

- ▶ Teoría Chern-Simons para el álgebra  $\mathfrak{B}$  en **cinco dimensiones**





## Gravitación De Einstein-Chern-Simons

- ▶ Teoría Chern-Simons para el álgebra  $\mathfrak{B}$  en **cinco dimensiones**
- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  se obtiene como  $S$ -expansión del álgebra AdS



# Gravedad de Einstein-Chern-Simons

## Gravitación De Einstein-Chern-Simons

- ▶ Teoría Chern-Simons para el álgebra  $\mathfrak{B}$  en **cinco dimensiones**
- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  se obtiene como **S—expansión del álgebra AdS**

## Relación con Relatividad General

Desemboca en Relatividad General sin constante cosmológica cuando la constante de acoplamiento se anula



## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac}$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{J}_{bc}] = \eta_{ab} \mathbf{P}_c - \eta_{ac} \mathbf{P}_b$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac}$$

$$[\mathbf{Z}_a, \mathbf{J}_{bc}] = \eta_{ab} \mathbf{Z}_c - \eta_{ac} \mathbf{Z}_b$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab}$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Z}_{bc}] = \eta_{ab} \mathbf{Z}_c - \eta_{ac} \mathbf{Z}_b$$

- El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**



## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{bd}J_{ac}$$

$$[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab}P_c - \eta_{ac}P_b$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{bd}Z_{ac}$$

$$[Z_a, J_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**

⇒  $\omega^{ab}$  es la **conexión de spin**.

## Conexión

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}$$



## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{bd} J_{ac}$$

$$[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{bd} Z_{ac}$$

$$[Z_a, J_{bc}] = \eta_{ab} Z_c - \eta_{ac} Z_b$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = \eta_{ab} Z_c - \eta_{ac} Z_b$$

- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**

⇒  $\omega^{ab}$  es la **conexión de spin**.

- ▶ El campo  $e^a$  **transforma como vector de Lorentz**

## Conexión

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}$$



# Conexión y curvatura de EChS

## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{bd}J_{ac}$$

$$[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab}P_c - \eta_{ac}P_b$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{bd}Z_{ac}$$

$$[Z_a, J_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**

⇒  $\omega^{ab}$  es la **conexión de spin**.

- ▶ El campo  $e^a$  **transforma como vector** de Lorentz

⇒ Puede ser interpretado como el ***vielbein***

## Conexión

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}$$



## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{bd}J_{ac}$$

$$[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab}P_c - \eta_{ac}P_b$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{ac}Z_{bd} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{bd}Z_{ac}$$

$$[Z_a, J_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = \eta_{ab}Z_c - \eta_{ac}Z_b$$

- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**

⇒  $\omega^{ab}$  es la **conexión de spin**.

- ▶ El campo  $e^a$  **transforma como vector** de Lorentz

⇒ Puede ser interpretado como el ***vielbein***

- ▶ **Dos campos de materia bosónica**,  $h^a$  y  $k^{ab}$

## Conexión

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}$$



## Álgebra $\mathfrak{B}$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{bd} J_{ac}$$

$$[P_a, J_{bc}] = \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{bd} Z_{ac}$$

$$[Z_a, J_{bc}] = \eta_{ab} Z_c - \eta_{ac} Z_b$$

$$[P_a, P_b] = Z_{ab}$$

$$[P_a, Z_{bc}] = \eta_{ab} Z_c - \eta_{ac} Z_b$$

- ▶ El álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene al **álgebra de Lorentz**

⇒  $\omega^{ab}$  es la **conexión de spin**.

- ▶ El campo  $e^a$  **transforma como vector** de Lorentz

⇒ Puede ser interpretado como el ***vielbein***

- ▶ Dos campos de materia bosónica,  $h^a$  y  $k^{ab}$

## Conexión

$$A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab}$$

## Curvatura

$$F = \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} (D_\omega h^a + k^a_b e^b) Z_a + \frac{1}{2} (D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b) Z_{ab}$$





# Lagrangiano de Einstein-Chern-Simons

## Lagrangiano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos



# Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

## Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos

- ▶ Lagrangeano Chern-Simons para el **álgebra de Poincaré**:  $\alpha_1 L_{\text{iso}(4,1)}^{(5)}$



# Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

## Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos

- ▶ Lagrangeano Chern-Simons para el **álgebra de Poincaré**:  $\alpha_1 L_{\text{iso}(4,1)}^{(5)}$
- ▶ El término de **Einstein-Hilbert** más acoplamientos no lineales proporcionales a  $l^2$ .



# Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

## Lagrangeano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos

- ▶ Lagrangeano Chern-Simons para el **álgebra de Poincaré**:  $\alpha_1 L_{\text{iso}(4,1)}^{(5)}$
- ▶ El término de **Einstein-Hilbert** más acoplamientos no lineales proporcionales a  $l^2$ .

### 2. La presencia del término de Einstein-Hilbert **no garantiza que la dinámica sea la de Relatividad General** [20]



## Lagrangiano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos

- ▶ Lagrangiano Chern-Simons para el **álgebra de Poincaré**:  $\alpha_1 L_{\text{iso}(4,1)}^{(5)}$
- ▶ El término de **Einstein-Hilbert** más acoplamientos no lineales proporcionales a  $l^2$ .

### 2. La presencia del término de Einstein-Hilbert **no garantiza que la dinámica sea la de Relatividad General** [20]

### 3. En general, aparecen **condiciones extras** en la geometría.

Ejemplo: solución de «vacío» con  $h^a = 0$  y  $k^{ab} = 0$ .

$$\delta L_{\text{EChS}}^{(5)} = 2\alpha_3 \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d \delta e^e + \alpha_3 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} \delta h^e .$$



# Lagrangiano de Einstein-Chern-Simons

## Lagrangiano de Einstein-Chern-Simons

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left( \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right) .$$

### 1. Dos términos

- ▶ Lagrangiano Chern-Simons para el **álgebra de Poincaré**:  $\alpha_1 L_{\text{iso}(4,1)}^{(5)}$
- ▶ El término de **Einstein-Hilbert** más acoplamientos no lineales proporcionales a  $l^2$ .

### 2. La presencia del término de Einstein-Hilbert **no garantiza que la dinámica sea la de Relatividad General** [20]

### 3. En general, aparecen **condiciones extras** en la geometría.

Ejemplo: solución de «vacío» con  $h^a = 0$  y  $k^{ab} = 0$ .

$$\delta L_{\text{EChS}}^{(5)} = 2\alpha_3 \epsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d \delta e^e + \alpha_3 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} \delta h^e .$$

### 4. La presencia del parámetro $l$ **hace la diferencia**.

Si  $l = 0$ ,

$$L_{\text{EChS}}^{(5)} \sim L_{\text{EH}}^{(5)}$$



# Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

## Considerando

- ▶ Lagrangeano

$$L = L_{\text{EChS}}^{(5)} + L_{\text{M}}[\Psi^A, e^a, \omega^{ab}, h^a].$$



# Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

## Considerando

- ▶ Lagrangeano

$$L = L_{\text{EChS}}^{(5)} + L_{\text{M}}[\Psi^A, e^a, \omega^{ab}, h^a].$$

- ▶ Torsión nula ( $T^a = 0$ ) y  $k^{ab} = 0$





# Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

## Considerando

- ▶ Lagrangeano

$$L = L_{\text{EChS}}^{(5)} + L_{\text{M}}[\Psi^A, e^a, \omega^{ab}, h^a].$$

- ▶ Torsión nula ( $T^a = 0$ ) y  $k^{ab} = 0$

## Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

$$de^a + \omega^a_b e^b = 0$$

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0$$

$$-\text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)}$$

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) + \text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a$$



# Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

## Considerando

- ▶ Lagrangeano

$$L = L_{\text{EChS}}^{(5)} + L_M[\Psi^A, e^a, \omega^{ab}, h^a].$$

- ▶ Torsión nula ( $T^a = 0$ ) y  $k^{ab} = 0$

## Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

$$de^a + \omega^a_b e^b = 0$$

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0$$

$$-\text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)}$$

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) + \text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a$$

## donde

- ▶ La 1-forma *energía-momentum*

$$\hat{T}_a = \hat{T}_{ab} e^b := - \star \left( \frac{\delta L_M}{\delta e^a} \right).$$

- ▶ La 1-forma *energía-momentum* asociada al campo  $h^a$

$$\hat{T}_a^{(h)} = \hat{T}_{ab}^{(h)} e^b := \frac{1}{2\alpha\alpha_3 \kappa_{\text{EH}}} \star \left( \frac{\delta L_M}{\delta h^a} \right)$$

- ▶ El parámetro  $l$

$$l \longrightarrow l' = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} l = \sqrt{\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|} l.$$



# Principio Cosmológico

La forma del campo  $e^{\alpha}$  se obtiene de la aplicación del principio cosmológico:

- ▶ El universo a grandes escalas es **isótropo** y **homogéneo**



# Principio Cosmológico

La forma del campo  $e^a$  se obtiene de la aplicación del principio cosmológico:

- ▶ El universo a grandes escalas es **isótropo** y **homogéneo**

## Vielbein

$$e^T = dt \quad , \quad e^R = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr \quad , \quad e^1 = a(t)r d\theta_1 \quad , \quad e^2 = a(t)r \sin \theta_1 d\theta_2 \quad , \quad e^3 = a(t)r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3$$

donde  $a(t)$  es el **factor de escala del universo** y  $k$  es el signo de la **curvatura del espacio** ( $\Sigma_4$ ):



# Principio Cosmológico

La forma del campo  $e^a$  se obtiene de la aplicación del principio cosmológico:

- ▶ El universo a grandes escalas es **isótropo** y **homogéneo**

## Vielbein

$$e^T = dt \quad , \quad e^R = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr \quad , \quad e^1 = a(t)r d\theta_1 \quad , \quad e^2 = a(t)r \sin \theta_1 d\theta_2 \quad , \quad e^3 = a(t)r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3$$

donde  $a(t)$  es el **factor de escala del universo** y  $k$  es el signo de la **curvatura del espacio** ( $\Sigma_4$ ):

- ▶ +1 para un **espacio cerrado** ( $S^4$ ),
- ▶ 0 para un **espacio plano** ( $E^4$ )
- ▶ -1 para un **espacio abierto** (hiperbólico).



# Principio Cosmológico

La forma del campo  $e^a$  se obtiene de la aplicación del principio cosmológico:

- ▶ El universo a grandes escalas es **isótropo** y **homogéneo**

## Vielbein

$$e^T = dt, \quad e^R = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad e^1 = a(t)r d\theta_1, \quad e^2 = a(t)r \sin \theta_1 d\theta_2, \quad e^3 = a(t)r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3$$

donde  $a(t)$  es el **factor de escala del universo** y  $k$  es el signo de la **curvatura del espacio** ( $\Sigma_4$ ):

- ▶ +1 para un **espacio cerrado** ( $S^4$ ),
- ▶ 0 para un **espacio plano** ( $E^4$ )
- ▶ -1 para un **espacio abierto** (hiperbólico).

## Campo $h^a$

La aplicación del **principio cosmológico** también **determina la forma del campo**  
 $h^a$

$$h^T = h_t e^0, \quad h^R = h(t) e^R, \quad h^i = h(t) e^i,$$



# Principio Cosmológico

La forma del campo  $e^a$  se obtiene de la aplicación del principio cosmológico:

- ▶ El universo a grandes escalas es **isótropo** y **homogéneo**

## Vielbein

$$e^T = dt, \quad e^R = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad e^1 = a(t)r d\theta_1, \quad e^2 = a(t)r \sin \theta_1 d\theta_2, \quad e^3 = a(t)r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3$$

donde  $a(t)$  es el **factor de escala del universo** y  $k$  es el signo de la **curvatura del espacio** ( $\Sigma_4$ ):

- ▶ +1 para un **espacio cerrado** ( $S^4$ ),
- ▶ 0 para un **espacio plano** ( $E^4$ )
- ▶ -1 para un **espacio abierto** (hiperbólico).

## Campo $h^a$

La aplicación del **principio cosmológico** también **determina la forma del campo**  $h^a$

$$h^T = h_t e^0, \quad h^R = h(t) e^R, \quad h^i = h(t) e^i,$$

- ▶  $h_t$  es una constante
- ▶  $h(t)$  es una función del tiempo  $t$  que se debe determinar.



# Ecuaciones de campo

## Ecuaciones de campo de EChS

Las ecuaciones de campo pueden ser reescritas como

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0$$

$$-\text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)}$$

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) = \kappa_{\text{EH}} (\hat{T}_a + \hat{T}_a^{(h)})$$





# Ecuaciones de campo

## Ecuaciones de campo de EChS

Las ecuaciones de campo pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e &= 0 \\ -\text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) &= \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)} \\ \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) &= \kappa_{\text{EH}} (\hat{T}_a + \hat{T}_a^{(h)})\end{aligned}$$

## Tensor energía-momentum

Consideraremos un fluido compuesto de dos fluidos perfectos, el primero relacionado con el tensor *energía-momentum* y el segundo, relacionado con el campo  $h^a$

$$\hat{T}_{ab} = \text{diag}(\rho, p, p, p, p) \quad , \quad \hat{T}_{ab}^{(h)} = \text{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)})$$

Las componentes del tensor *energía-momentum* del fluido compuesto son

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{ab} &= \hat{T}_{ab} + \hat{T}_{ab}^{(h)} = \text{diag}(\rho + \rho^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}) \\ &= \text{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p})\end{aligned}$$



# Ecuaciones de campo

## Ecuaciones de campo de EChS

Las ecuaciones de campo pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e &= 0 \\ -\operatorname{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) &= \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)} \\ \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) &= \kappa_{\text{EH}} (\hat{T}_a + \hat{T}_a^{(h)}) \end{aligned}$$

## Ecuaciones de campo explícitas

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \tilde{\rho} \\ \ddot{a} + \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) &= -\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12} \tilde{p} \\ \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 &= -\operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} \rho^{(h)} \\ \frac{\ddot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) &= \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} p^{(h)} \\ \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left( (h - h_t) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right) &= 0 \end{aligned}$$

## Tensor energía-momentum

Consideraremos un fluido compuesto de dos fluidos perfectos, el primero relacionado con el tensor *energía-momentum* y el segundo, relacionado con el campo  $h^a$

$$\hat{T}_{ab} = \operatorname{diag}(\rho, p, p, p, p) \quad , \quad \hat{T}_{ab}^{(h)} = \operatorname{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)})$$

Las componentes del tensor *energía-momentum* del fluido compuesto son

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab} &= \hat{T}_{ab} + \hat{T}_{ab}^{(h)} = \operatorname{diag}(\rho + \rho^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}) \\ &= \operatorname{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}) \end{aligned}$$



# Ecuaciones de campo

## Ecuaciones de campo de EChS

Las ecuaciones de campo pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e &= 0 \\ -\operatorname{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) &= \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)} \\ \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) &= \kappa_{\text{EH}} (\hat{T}_a + \hat{T}_a^{(h)}) \end{aligned}$$

El punto denota diferenciación respecto de la coordenada temporal  $t$

$$\dot{a} := \frac{da}{dt}$$

## Ecuaciones de campo explícitas

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \tilde{\rho}$$

$$\ddot{a} + \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12} \tilde{p}$$

$$\left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = -\operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} \rho^{(h)}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} p^{(h)}$$

$$\left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left( (h - h_t) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right) = 0$$

## Tensor energía-momentum

Consideraremos un fluido compuesto de dos fluidos perfectos, el primero relacionado con el tensor *energía-momentum* y el segundo, relacionado con el campo  $h^a$

$$\hat{T}_{ab} = \operatorname{diag}(\rho, p, p, p, p) \quad , \quad \hat{T}_{ab}^{(h)} = \operatorname{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)})$$

Las componentes del tensor *energía-momentum* del fluido compuesto son

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab} &= \hat{T}_{ab} + \hat{T}_{ab}^{(h)} = \operatorname{diag}(\rho + \rho^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}, p + p^{(h)}) \\ &= \operatorname{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}) \end{aligned}$$



# Era de la **Energía oscura**

## Era de la Energía oscura

$$\hat{T}_{ab} \ll \hat{T}_{ab}^{(h)} \implies \rho = p = 0$$



## Era de la Energía oscura

$$\hat{T}_{ab} \ll \hat{T}_{ab}^{(h)} \implies \rho = p = 0$$

## Ecuaciones de campo



$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) \left(\text{sgn}(\alpha) \frac{2}{l^2} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) = 0.$$



$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho^{(h)}$$



$$\frac{\ddot{a}}{a} \rho^{(h)} = \text{sgn}(\alpha) \frac{2}{l^2} p^{(h)}$$



$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) \left((h - h_t) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h}\right) = 0$$



# Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ )

Solución estacionaria:

$$a(t) = \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0$$

►  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$



# Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ )

## Solución estacionaria:

$$a(t) = \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$
- ▶  $h(t)$  arbitrario.



# Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ )

## Solución estacionaria:

$$a(t) = \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$
- ▶  $h(t)$  arbitrario.

## Solución de expansión acelerada: $\alpha < 0$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \sinh \left\{ \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \text{arsenh} \left( \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2 k}} a_0 \right) \right\}$$

- ▶ Expansión acelerada como si fuera una constante cosmológica positiva.

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{4\epsilon}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0,$$





# Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ )

## Solución estacionaria:

$$a(t) = \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$
- ▶  $h(t)$  arbitrario.

## Solución de expansión acelerada: $\alpha < 0$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\text{sgn}(\alpha)l^2k}{2}} \sinh \left\{ \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}}(t - t_0) + \text{arsenh} \left( \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2k}} a_0 \right) \right\}$$

- ▶ Expansión acelerada como si fuera una constante cosmológica positiva.

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2\kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0,$$

- ▶  $h(t) \rightarrow h_t$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

$$h(t) = \frac{a_0}{a(t)}(h_0 - h_t) + h_t$$

con  $h(t_0) = h_0$ .



## Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ ) II

Solución de expansión desacelerada:  $\alpha > 0$

$$a(t) = \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left( \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2 k}} a_0 \right) \right\}$$

- Expansión desacelerada como si se tratase de una constante cosmológica negativa

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) < 0,$$



## Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ ) II

### Solución de expansión desacelerada: $\alpha > 0$

$$a(t) = \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \sin \left\{ \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left( \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2 k}} a_0 \right) \right\}$$

- Expansión desacelerada como si se tratase de una constante cosmológica negativa

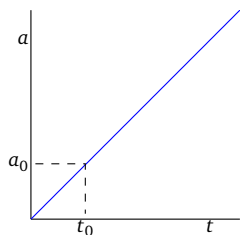
$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) < 0,$$



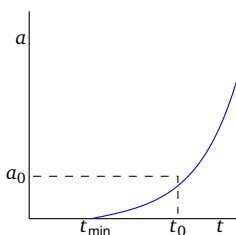
$$h(t) = \frac{\alpha_0}{a(t)} (h_0 - h_t) + h_t.$$



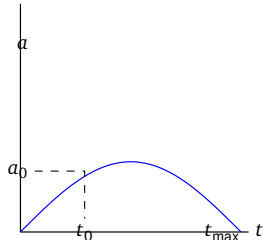
## Era de la **Energía oscura**: Universo abierto ( $k = -1$ ) III



(a)  $\ddot{a}(t) = 0$ .



(b)  $\ddot{a}(t) \neq 0$  con  $\alpha < 0$ .



(c)  $\ddot{a}(t) \neq 0$  con  $\alpha > 0$ .

Figura : Distintos casos de evolución del factor de escala  $a(t)$  con  $k = -1$ .



# Era de la **Energía oscura**: Universo plano ( $k = 0$ )

Solución estática:

$$a(t) = a_0,$$

▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$  y  $h(t)$  arbitrario



## Era de la **Energía oscura**: Universo plano ( $k = 0$ )

### Solución estática:

$$a(t) = a_0,$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$  y  $h(t)$  arbitrario

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0)\right)$$

- ▶ Como si fuese constante cosmológica positiva

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$



## Era de la **Energía oscura**: Universo plano ( $k = 0$ )

### Solución estática:

$$a(t) = a_0,$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$  y  $h(t)$  arbitrario

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0)\right)$$

- ▶ Como si fuese constante cosmológica positiva

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$

- ▶ El campo  $h^a$  es dado por

$$h(t) = \frac{a_0}{a(t)}(h_0 - h_t) + h_t,$$



## Era de la **Energía oscura**: Universo plano ( $k = 0$ )

### Solución estática:

$$a(t) = a_0,$$

- ▶  $\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0$  y  $h(t)$  arbitrario

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0)\right)$$

- ▶ Como si fuese constante cosmológica positiva

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$

- ▶ El campo  $h^a$  es dado por

$$h(t) = \frac{\alpha_0}{a(t)}(h_0 - h_t) + h_t,$$

**No hay solución dinámica si  $\alpha$  es mayor que cero.**





## Era de la **Energía oscura**: Universo cerrado ( $k = 1$ )

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = \sqrt{\frac{-\text{sgn}(\alpha)l^2k}{2}} \cosh \left[ \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}}(t - t_0) + \text{arcosh} \left( \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right] \quad (1)$$

- ▶ Como constante cosmológica negativa

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{4\epsilon}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$



# Era de la **Energía oscura**: Universo cerrado ( $k = 1$ )

## Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = \sqrt{\frac{-\text{sgn}(\alpha)l^2k}{2}} \cosh \left[ \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}}(t - t_0) + \text{arcosh} \left( \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right] \quad (1)$$

- ▶ Como constante cosmológica negativa

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$

- ▶ El campo  $h^a$  es dado por

$$h(t) = \frac{a_0}{a(t)}(h_0 - h_t) + h_t,$$



# Era de la **Energía oscura**: Universo cerrado ( $k = 1$ )

## Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$a(t) = \sqrt{\frac{-\text{sgn}(\alpha)l^2k}{2}} \cosh \left[ \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}}(t - t_0) + \text{arcosh} \left( \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right] \quad (1)$$

- ▶ Como constante cosmológica negativa

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = -\frac{4\pi}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \text{sgn}(\alpha) > 0.$$

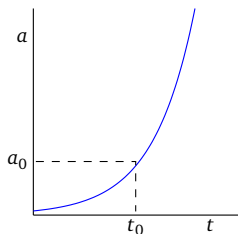
- ▶ El campo  $h^a$  es dado por

$$h(t) = \frac{a_0}{a(t)}(h_0 - h_t) + h_t,$$

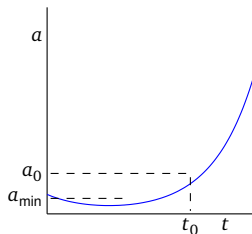
No hay solución estacionaria  $\ddot{a} = 0$  ni solución dinámica con  $\alpha > 0$ .



## Era de la **Energía oscura**: Universos plano ( $k = 0$ ) y cerrado ( $k = 1$ )



(a)  $k = 0$  y  $\alpha < 0$ .



(b)  $k = 1$  y  $\alpha < 0$ .

Figura : *Expansión acelerada del factor de escala  $a(t)$ .*



# Era de la **Materia**

## Era de la Materia (polvo)

$$\rho \neq 0 \quad , \quad p = 0$$



## Era de la Materia (polvo)

$$\rho \neq 0 \quad , \quad p = 0$$

### Ecuaciones de campo a resolver



$$\dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(t) = \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \rho_0$$



$$\left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 + \frac{2 \operatorname{sgn}(\alpha)}{l^2} \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) - \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{EH}}{12l^2} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 = 0.$$



$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = - \frac{\kappa_{EH}}{12} P^{(h)}$$



$$\left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = - \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{EH}}{12l^2} \rho^{(h)}$$



$$\left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left( (h - h_t) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right) = 0$$



## Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ )

### Espacio de configuración

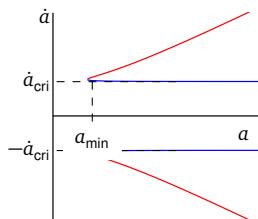
$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) + 1}$$



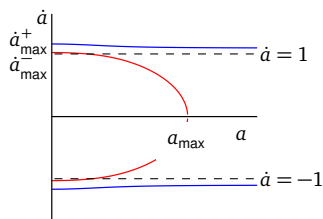
# Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ )

## Espacio de configuración

$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) + 1}$$



(a)  $\alpha < 0$ .



(b)  $\alpha > 0$ .

Figura : Espacios de configuración del factor de escala con  $k = -1$ .





## Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ ) II

### Soluciones asintóticamente estacionarias:

Cuando  $t \rightarrow \infty$  es aproximada por

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{\frac{\kappa_{EH}}{24} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^2} - k} \approx \pm \sqrt{-k},$$



# Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ ) II

## Soluciones asintóticamente estacionarias:

Cuando  $t \rightarrow \infty$  es aproximada por

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{\frac{\kappa_{EH}}{24} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^2} - k} \approx \pm \sqrt{-k},$$

Solución aproximada

$$a(t) = \pm \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0, \quad (k = -1).$$



# Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ ) II

## Soluciones asintóticamente estacionarias:

Cuando  $t \rightarrow \infty$  es aproximada por

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{\frac{\kappa_{EH}}{24} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^2} - k} \approx \pm \sqrt{-k},$$

Solución aproximada

$$a(t) = \pm \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0, \quad (k = -1).$$

### Restricciones

1. En el caso  $\alpha < 0$

$$1 < \dot{a} \leq \dot{a}_{\text{cri}} = \sqrt{1 + a_0^2 \sqrt{\frac{\kappa_{EH}}{12l^2}} \rho_0}.$$

$$a_{\text{min}} = a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{EH} l^2}{12} \rho_0},$$

$$\rho_{\text{max}} = \frac{12}{\kappa_{EH} l^2}.$$

2. En el caso  $\alpha > 0$

$$1 < \dot{a} \leq \dot{a}_{\text{max}}^+ = \sqrt{1 + a_0^2 \sqrt{\frac{\kappa_{EH}}{12l^2}} \rho_0}.$$



## Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ ) III

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Se tiene que

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 - k},$$



### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Se tiene que

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 - k},$$

cuya solución aproximada es dada por

$$a(t) = \pm \sqrt{\frac{\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \sinh \left\{ \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \text{arsenh} \left( \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2 k}} a_0 \right) \right\}, \quad (t \rightarrow \infty).$$



## Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Se tiene que

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 - k},$$

cuya solución aproximada es dada por

$$a(t) = \pm \sqrt{\frac{\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \sinh \left\{ \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \text{arsenh} \left( \sqrt{\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2 k}} a_0 \right) \right\}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

- Valor mínimo tanto del factor de escala como de su

$$a_{\min} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0} \leq a, \quad \dot{a}_{\text{cri}} := \sqrt{1 + a_0^2 \sqrt{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2}} \rho_0} \leq \dot{a}$$

donde

- Valor máximo para la densidad de energía

$$\rho_{\max} = \frac{12}{\kappa_{\text{EH}} l^2}.$$



## Soluciones de expansión desacelerada y contracción: ( $\alpha > 0$ )

Se tiene que

$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) - k}$$



## Soluciones de expansión desacelerada y contracción: ( $\alpha > 0$ )

Se tiene que

$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 + \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) - k}$$

- ▶ Acotada la derivada del factor de escala y el factor de escala

$$0 \leq a \leq a_{\text{max}} := \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho_0 a_0^4} \quad , \quad 0 \leq \dot{a} \leq \dot{a}_{\text{max}} := \sqrt{1 - a_0^2 \sqrt{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} \rho_0}}$$

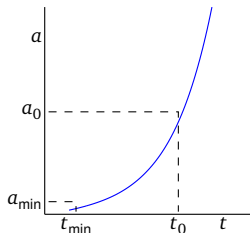
- ▶ Induce un valor mínimo para la densidad de energía

$$\rho_{\text{min}} = \left( \frac{24 a_0^2}{12 l^2 - \kappa_{\text{EH}} \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0.$$

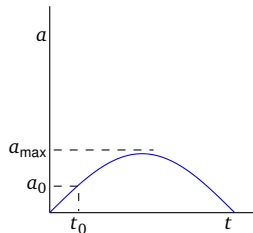




# Era de la **Materia**: Universo abierto ( $k = -1$ ) V



(a) *Expansión acelerada con  $\alpha < 0$ .*



(b) *Expansión desacelerada con  $\alpha > 0$ .*

Figura : Soluciones dinámicas del factor de escala  $a(t)$



# Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ )

## Espacio de configuración

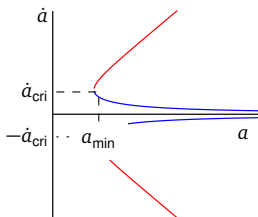
$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right)}$$



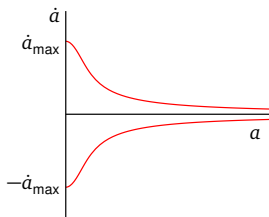
# Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ )

## Espacio de configuración

$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right)}$$



(a)  $\alpha < 0$ .



(b)  $\alpha > 0$ .

Figura : Espacios de configuración del factor de escala con  $k = 0$ .



## Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ ) II

### Soluciones de expansión desacelerada:

Soluciones que se comportan como  $\sim \sqrt{t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .



## Soluciones de expansión desacelerada:

Soluciones que se comportan como  $\sim \sqrt{t}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

1. Si  $\alpha < 0$

- ▶  $\dot{a}$  acotado

$$0 < \dot{a} \leq \dot{a}_{\text{cri}} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12l^2} \rho_0}$$

- ▶  $a$  acotado

$$a_{\text{min}} = a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0}$$

- ▶ Valor máximo para la densidad de energía

$$\rho_{\text{max}} = \frac{12}{\kappa_{\text{EH}} l^2}.$$

2. Caso  $\alpha > 0$

- ▶  $\dot{a}$  acotado

$$\dot{a} \leq \dot{a}_{\text{max}} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12l^2} \rho_0}$$



## Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ ) III

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Cuando  $t$  va a infinito se tiene

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2}},$$



## Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ ) III

### Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Cuando  $t$  va a infinito se tiene

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2}},$$

con solución aproximada

$$a(t) = a_0 \exp\left(\pm \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0)\right)$$



# Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ ) III

## Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

Cuando  $t$  va a infinito se tiene

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2}},$$

con solución aproximada

$$a(t) = a_0 \exp\left(\pm \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0)\right)$$

- ▶ Mínimo  $\dot{a}$

$$\dot{a}_{\text{cri}} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12l^2}} \rho_0 \leq \dot{a}$$

- ▶ El factor de escala tiene un valor mínimo

$$a_{\text{min}} = a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12}} \rho_0$$

- ▶ Valor máximo de la densidad de energía

$$\rho_{\text{max}} = \frac{12}{\kappa_{\text{EH}} l^2}.$$





# Era de la **Materia**: Universo plano ( $k = 0$ ) IV

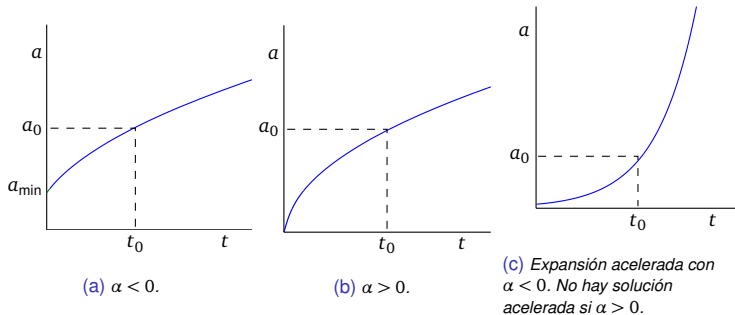


Figura : Expansión (des)acelerada del factor de escala  $a(t)$  con  $k = 0$ .



## Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ )

### Espacio de configuración

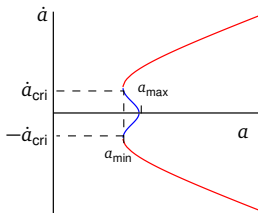
$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{EH} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) - 1}$$



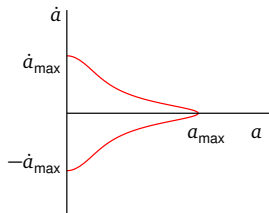
# Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ )

## Espacio de configuración

$$\dot{a} = \pm \sqrt{-\frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} a^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{EH} l^2}{12} \rho_0 \frac{a_0^4}{a^4}} \right) - 1}$$



(a)  $\alpha < 0$ .



(b)  $\alpha > 0$ .

Figura : Espacios de configuración del factor de escala con  $k = 1$ .



### Soluciones de expansión desacelerada y contracción:

- ▶ Se tiene que hay un valor máximo del factor de escala

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho_0 a_0^4},$$

- ▶ Se tiene una densidad de energía mínima

$$\rho_{\min} = \left( \frac{24 a_0^2}{12l^2 - \text{sgn}(\alpha) \kappa_{\text{EH}} \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0.$$



## Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ ) II

### Soluciones de expansión desacelerada y contracción:

- ▶ Se tiene que hay un valor máximo del factor de escala

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho_0 a_0^4},$$

- ▶ Se tiene una densidad de energía mínima

$$\rho_{\min} = \left( \frac{24 a_0^2}{12l^2 - \operatorname{sgn}(\alpha) \kappa_{\text{EH}} \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0.$$

En el caso  $\alpha < 0$ ,

- ▶ Valor máximo de la derivada temporal del factor de escala  $\dot{a}_{\text{cri}}$

$$0 < \dot{a} \leq \dot{a}_{\text{cri}} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12l^2} \rho_0 - 1}.$$

- ▶ Factor de escala acotado

$$a_{\min} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0} \leq a \leq a_{\max} := \sqrt{\frac{l^2}{2} + \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho_0 a_0^4}$$

- ▶ Densidad acotada

$$\rho_{\min} := \left( \frac{24 a_0^2}{12l^2 + \kappa_{\text{EH}} \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0 \leq \rho \leq \rho_{\max} := \frac{12}{\kappa_{\text{EH}} l^2},$$



## Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ ) III

En el caso  $\alpha > 0$

- ▶ Valor máximo de la derivada temporal del factor de escala

$$\dot{a} \leq \dot{a}_{\max} := \sqrt{a_0^2 \sqrt{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12l^2}} \rho_0 - 1},$$

- ▶ El factor de escala también tiene un máximo

$$a \leq a_{\max} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{\kappa_{\text{EH}}}{24} \rho_0 a_0^4},$$

- ▶ La densidad de energía tiene una cota inferior

$$\rho_{\min} = \left( \frac{24 a_0^2}{12l^2 - \kappa_{\text{EH}} \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0 \leq \rho$$



## Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ ) IV

Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} - 1},$$



## Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ ) IV

Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} - 1},$$

con solución aproximada

$$a(t) = \sqrt{\frac{-\text{sgn}(\alpha)l^2k}{2}} \cosh \left[ \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{l^2}}(t - t_0) + \text{arcosh} \left( \sqrt{-\frac{2\text{sgn}(\alpha)}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right],$$





## Solución de expansión acelerada: ( $\alpha < 0$ )

$$\dot{a} \approx \pm a \sqrt{-2 \frac{\text{sgn}(\alpha)}{l^2} - 1},$$

con solución aproximada

$$a(t) = \sqrt{\frac{-\text{sgn}(\alpha) l^2 k}{2}} \cosh \left[ \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{l^2}} (t - t_0) + \text{arcosh} \left( \sqrt{-\frac{2 \text{sgn}(\alpha)}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right],$$

- ▶ Valor mínimo de la derivada temporal del factor de escala

$$\dot{a}_{\text{cri}} := a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12 l^2} \rho_0 - 1} \leq \dot{a}$$

- ▶ El factor de escala tiene un valor mínimo

$$a_{\text{min}} = a_0 \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}} l^2}{12} \rho_0},$$

- ▶ Máximo valor de la densidad de energía

$$\rho_{\text{max}} = \frac{12}{\kappa_{\text{EH}} l^2}.$$



# Era de la **Materia**: Universo cerrado ( $k = 1$ ) V

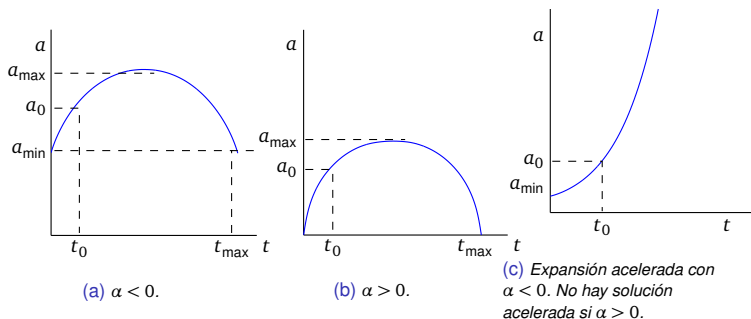


Figura : Expansión (des)acelerada y contracción del factor de escala  $\alpha(t)$  con  $k = 1$ .



# Conclusiones

1. Se obtuvieron soluciones cosmológicas tanto para la *Era de la Energía Oscura* como para la *Era de la Materia*. Las soluciones encontradas conducen a interpretar el acoplamiento del campo  $h^a$  con la materia ordinaria, con la acción de una constante cosmológica.



# Referencias I



F. Izaurieta, P. Minning, A. Perez, E. Rodriguez and P. Salgado, *Standard general relativity from Chern-Simons gravity*, *Phys. Lett. B* **678**, 213-217 (2009). arXiv:0905.2187.



M. Cataldo, J. Crisóstomo, S. del Campo, F. Gómez, C. Quinzacara and P. Salgado *Accelerated FRW solutions in Chern-Simons gravity*, *Eur. Phys. J. C.* (2014) **74**:3087. arXiv:1401.2128 [gr-qc]



*Gracias... Totales*



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO  
La Universidad de la Región del Biobío



UNIVERSIDAD  
SAN SEBASTIÁN